MAI 1 – příklady pro „7. cvičení“

Spojitost funkce.

1. Je dána funkce $f(x)=\exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$ *pro* $|x|<1$, $f(x)=0$ *pro* $|x|\geq 1$.
   Ukažte, že funkce f je spojitá v R.

2. Jsou dány funkce $f,\ g:\ (-1,1)\to R$. Rozhodněte o spojitosti funkce $f+g$ a $f.g$ v bodě 0.
   A vaše tvrzení odůvodněte.

3. Ukažte, že platí: když je $|f(x)|\leq x^2$ pro všechna $x\in R$, pak funkce $f(x)$ je spojitá v bodě 0.

4. Ukažte, že platí: jsou-li funkce $f(x), g(x)$ spojité v bodě $a\in R$, pak také funkce $|f(x)|$,
   $\max(f(x),g(x))$ i $\min(f(x),g(x))$ jsou funkce spojité v bodě a.

5. Může mít Darbouxovu vlastnost i funkce nespojitá na intervalu (a,b)?
   A může i funkce nespojitá na intervalu (a,b) zobrazit tento interval na interval?

V přednášce 6. (Spojitost) byla i poznámka o limitě a spojitosti v metrických prostorech.
Můžeme si „vyzkoušet“ limitu a spojitost v tom nejjednodušším zobecnění – u reálných funkcí dvou proměnných (třeba až poté, co si zopakujeme definici derivace a výpočet derivací).

1. a) Vyšetřete spojitost funkcí v jejich definičních oborech:

   $$f(x,y)=x^2-y^2\ ;\quad f(x,y)=\sqrt{9-(x^2+y^2)}\ ;\quad f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}\ ;\quad f(x,y)=\exp(-x^2-y^2);$$

   b) Zkuste určit limitu funkce $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\to(0,0)$.

2**. Rozhodněte, zda následující funkce jsou spojité v R^2:

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$;

b) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$;

c) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$;

d) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.

Derivace funkce.

1. Dokažte, že platí „tahákové“ vzorce:

a) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$; b) $(\sin x)' = \cos x$, $x \in R$; c) $(e^x)' = e^x$, $x \in R$;

d) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x \in (0,\infty)$; e) $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

2. Výpočet derivace funkce .

Určete definiční obory a obory, kde existují derivace následujících funkcí a tyto derivace vypočítejte :

$f(x) := \frac{1}{x} + 4x^2$; $\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$; $x + \sin x$; $x^2 \sin x$; $x \ln(x-3)$; $\frac{x^2+1}{x^2-1}$; $\frac{x^3}{x^2-1}$; $\frac{2}{\left(x^3-2\right)^2}$;

$x - 2arctg\, x$;

$\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$; $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$; $\sqrt{1+\sin 4x}$; $\cos\sqrt{x}$; $x^2 e^{-x}$; $e^{\frac{1}{x}} - x$; $\exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$; $\frac{e^{-x}}{2-x}$; $\sqrt{x}\, arctg\sqrt{x}$;

$x^2 \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$; $e^{-3x^2} \cos(\ln 2x)$; $\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$;

$x^3 \ln(arctg\, 2x)$; ; $\sqrt{x^2+1}\, arctg(\sin 2x)$; $arctg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$; $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

3. Spojitost funkce, výpočet derivací a „dopočítávání“ derivací ve „špatných“ bodech:

a) Vyšetřete existenci a hodnotu derivace funkce

(i) $f(x) = |x|$ a $g(x) = \left|x^3\right|$ v bodě $x = 0$

(ii) $f(x) = |\ln x|$ a $g(x) = \left|\ln^3 x\right|$ v bodě $x = 1$.

(iii) $f(x) = |arctg\, x|$ a $g(x) = \left|arctg^3 x\right|$ v bodě $x = 0$

Dokážete výsledek zobecnit ?

b) Je dána funkce f předpisem : $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$ *pro* $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Ukažte, že funkce f je v bodě $x_0 = 0$ spojitá. Spočítejte $f'(x)$ pro všechna $x \in R$.

Ukažte, že také derivace funkce f je spojitá v bodě $x_0 = 0$

c) Je dána funkce f předpisem :

(i) $f(x) = x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *pro* $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Ukažte, že funkce f je v bodě $x_0 = 0$ spojitá. Spočítejte $f'(x)$ pro všechna $x \in R$.

Ukažte, že také derivace funkce f je spojitá v bodě $x_0 = 0$.

(ii) $f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *pro* $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Ukažte, že funkce f je v bodě $x_0 = 0$ spojitá .

Spočítejte $f'(x)$ pro všechna $x \in R$ a vyšetřete i zde spojitost derivace funkce f v bodě $x_0 = 0$.